A. **Mathematische Grundkenntnisse**

1) Mathematische Verknüpfungs-Zeichen

- Das Pluszeichen wird immer + geschrieben.
- Das Minuszeichen wird meistens - , manchmal aber auch ./. geschrieben.
- Das Malzeichen wird meist als Punkt · häufig aber auch als das Kreuz × zweier Striche geschrieben.
  Damit das Zeichen klar erkennbar ist, verwenden wir in diesem Dokument in der Regel das × als Malzeichen.
- Das Geteiltzeichen wird als Doppelpunkt : oder als Schrägstrich /, manchmal auch als Strich mit einem Punkt darüber und einem darunter ÷ geschrieben.
- Brüche sind eine andere Art, Divisionen darzustellen:
  7:2 = 7/2 = $\frac{7}{2}$
- Gemischter Bruch / Bruch / Dezimalschreibweise
  $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$
  = drei unterschiedliche Schreibweisen für dieselbe Zahl.

Mathematische Zeichen	
Arithmetik	
Pluszeichen	+
Minuszeichen	−, ./.
Malzeichen	·, ×
Geteiltzeichen	:, ÷, /
Plusminuszeichen	±, ∓
Gleichheitszeichen	=
Vergleichszeichen	<, ≤, >, ≥
Wurzelzeichen	√
Prozentzeichen	%
Analysis	
Summenzeichen	Σ
Produktzeichen	Π
Differenzzeichen, Nabla	Δ, ∇

1) Bezeichnung der Bestandteile einer Rechenoperation

a) **Addition**

$$6 + 2 = 8$$

„erster Summand“ „plus“ „zweiter Summand“ „ist gleich“ „Summe“

b) **Subtraktion** (umgangssprachlich: „voneinander abziehen“)

$$6 - 2 = 4$$

„Minuend“ „minus“ „Subtrahend“ „ist gleich“ „Differenz“

c) **Multiplikation** (umgangssprachlich: „malnehmen“)

$$6 \times 2 = 12$$

„erster Faktor“ „mal“ „zweiter Faktor“ „ist gleich“ „Produkt“ oder auch:

„Multiplikator“ „mal“ „Multiplikant“ „ist gleich“ „Produkt“

d) **Division** (umgangssprachlich: „teilen“)

$$6 : 2 = 3$$

„Dividend“ „durch“ „Divisor“ „ist gleich“ „Quotient“

2) Zerlegung in Primfaktoren

Eine Primzahl ist

- eine ganze Zahl, (also 2, 3, 5 aber nicht eine Dezimalzahl wie 5,74, oder ein Bruch wie $\frac{3}{4}$)
- die größer als 1 und

- ausschließlich durch sich selbst und durch 1 so teilbar ist, dass das
- Ergebnis dieser Division wieder eine ganze Zahl ist.

Ganze Zahlen, die keine Primzahlen sind, lassen sich in Faktoren zerlegen, die aus Primzahlen bestehen (sogenannte Primfaktorzerlegung)

2 Primzahl	8 = 2 × 2 × 2 in Primfaktoren zerlegbar
3 Primzahl	9 = 3 × 3 in Primfaktoren zerlegbar
4 = 2 x 2 in Primfaktoren zerlegbar	10 = 2 × 5 in Primfaktoren zerlegbar
5 Primzahl	11 Primzahl
6 = 2 × 3 in Primfaktoren zerlegbar	12 = 2 × 2 × 3 in Primfaktoren zerlegbar
7 Primzahl	13 Primzahl

<u>Hilfs-Methoden zur Primfaktorzerlegung:</u>

- Alle geraden Zahlen (also Zahlen die auf 2, 4, 8 enden) zunächst immer wieder durch zwei teilen, bis eine ungerade ganze Zahl das Ergebnis ist
- Ist die Quersumme einer Zahl durch drei teilbar (so dass das Ergebnis eine ganze Zahl ist), so ist die Zahl selber auch durch drei teilbar (so dass das Ergebnis eine ganze Zahl ist),
- Ist die Endung einer ganzen Zahl 5 oder 0, so ist die Zahl durch 5 teilbar (so dass das Ergebnis eine ganze Zahl ist, Hilfsmethode gilt ab Ergebniszahl 10)

3) Umformung von Einheiten und Exponentialschreibweise

Ist der Einheit ein großes **K** vorangestellt, so bedeutet das: ein Tausendfaches. 1 KV (ausgesprochen: ein Kilovolt) sind also eintausend Volt, mathematisch geschrieben 1 KV = 1.000 V.

Eine Zahl kann man auch mit der mathematischen **Exponentialschreibweise** darstellen. Die Zahl, die dabei mit sich selbst multipliziert wird, nennt man dabei **Basis**, die Anzahl wie oft sie mit sich selbst multipliziert wird, nennt man **Exponent**. Beides zusammen nennt man **Potenz**. Die Exponentialschreibweise der Zahl 1.000 zur Basis 10 ist 10^3, da man die Zahl 10 dreimal mit sich selbst multiplizieren muss, um Tausend zu erhalten:
(10 x 10 x 10 = 1.000). Bei der Potenz 10^3 ist 10 die Basis, 3 der Exponent.

Ist der Einheit ein großes **M** vorangestellt, so bedeutet das: ein Millionenfaches. 1 GV (ausgesprochen: ein Gigavolt) sind also eine Million Volt. Da man die Zahl 10 sechs Mal mit sich selbst multiplizieren muss, um eine Million zu erhalten, wird die Zahl Million in Exponentialschreibweise 10^6 geschrieben.

Ist der Einheit ein kleines **m** vorangestellt, so bedeutet das: ein Tausendstel. 1 mV (ausgesprochen: ein Millivolt) ist also ein Tausendstel Volt, mathematisch geschrieben 1mV = 0,001 V. Bei der Exponentialschreibweise verwendet man einen negativen Exponenten:
1mV = $\frac{1}{1.000}$ V = $\frac{1}{10\times10\times10}\mathrm{V} = \frac{1}{10^3}\mathrm{V} = 1\times10^{-3}\mathrm{~V} = 10^{-3}\mathrm{~V}$
Ist der Einheit der griechische Buchstabe My **µ** vorangestellt, so bedeutet das: ein Millionstel.
1 µV (ausgesprochen: ein Mikrovolt) ist also ein Millionstel Volt,
mathematisch geschrieben 1µV = 0,001 mV = 0,000001 V = 1 x $10^{-6}\mathrm{~V} = 10^{-6}$ V.

4) Kürzen

a) Bei Divisionen:

1. Steht über und unter dem Bruchstrich dieselbe Potenz, so hebt sie sich gegenseitig auf.

Beispiel $\frac{5\mathrm{~mV}}{7\mathrm{mA}} = \frac{5\times10^{-3}\mathrm{V}}{7\times10^{-3}\mathrm{A}} = \frac{5\mathrm{~V}}{7\mathrm{~A}}$

2. Steht über und unter dem Bruchstrich eine Potenz mit derselben Basis aber einem anderen Exponenten, so kann man durch Subtraktion der Exponenten kürzen:

Beispiel $\frac{5\ \mathrm{mV}}{7\mu\mathrm{A}} = \frac{5\times10^{-3}\mathrm{V}}{7\times10^{-6}\mathrm{A}} = \frac{5\ \mathrm{V}}{7\times10^{-3}\mathrm{A}} = \frac{5\ \mathrm{V}}{7\ \mathrm{mA}}$

3. Lassen sich Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren, so kann man ebenfalls kürzen. Hierzu sind Zähler und Nenner in ihre Primfaktoren zu zerlegen:

Beispiel: $\frac{25\ \mathrm{V}}{35\ \mathrm{A}} = \frac{5\times5\ \mathrm{V}}{7\times5\ \mathrm{A}} = \frac{5\ \mathrm{V}}{7\ \mathrm{A}}$

b) Bei Multiplikationen:

Gegenläufige Exponenten zur selben Basis kann man ebenfalls gegeneinander kürzen:

Beispiel 1: 7 mA x 5 KV = 7 x 10^{-3} A x 5 x 10^{3} V = 7 A x 5 V

Beispiel 2: 7 µA x 5 KV = 7 x 10^{-6} A x 5 x 10^{3} V = 7 x 10^{-3} A x 5 V = 7 mA x 5 V

5) Runden

Manche Zahlen, wie die Zahl π (= 3,1415926535…) haben viele Nachkommastellen, die man nicht alle ausschreiben kann. Deswegen bricht man an einer Stelle ab, die mathematische Bezeichnung für dieses Vorgehen heißt **Runden**. Wenn die Zahl, die der Stelle folgt, an der man rundet, 5 oder größer ist, dann rundet man auf, ansonsten rundet man ab.

Beispiel 1 - **Aufrunden**: Entscheidet man sich dafür, π an der vierten Nachkommastelle zu runden, so rundet man auf und schreibt 3,1416, da die nächstfolgende Zahl 9 ≥ (größergleich) 5 ist.

Beispiel 2 – **Abrunden**: Entscheidet man sich dafür π, an der zweiten Nachkommastelle zu runden, so rundet man ab und schreibt 3,14, da die nächstfolgende Zahl 1 < (kleiner) als 5 ist.

6) Rechenregeln in Gleichungen

a) Punkt vor Strichrechnung

Da man im Deutschen das Pluszeichen + bei der Addition und das Minuszeichen –bei der Subtraktion mit Strichen zeichnet, nennt man Addition und Subtraktion auch „Strichrechnung“.

Da man im Deutschen das Geteiltzeichen meist als Doppelpunkt : und das Malzeichen häufig auch als Punkt · (statt ×) zeichnet, bezeichnet man die Rechenarten Division und Multiplikation auch als Punktrechnung.

„Punkt vor Strichrechnung“ bedeutet nun, das in Gleichungen üblicherweise zuerst die Multiplikationen und die Divisionen und dann erst die Additionen und Subtraktionen durchgeführt werden – Ausnahme: wenn durch Klammern gekennzeichnet ist, welche Rechenoperationen zuerst durchgeführt werden sollen.

b) Einklammern

Klammert man in einer Gleichung einzelne Bestandteile ein, so bedeutet das, dass man zunächst die Ergebnisse der Rechenoperationen innerhalb der Klammern berechnen muss. Das ist wichtig, da bei manchen Berechnungen sich unterschiedliche Ergebnisse ergeben, wenn man die einzelnen Zahlen in verschiedener Reihenfolge miteinander verknüpft.

Bei Anwendung der Grundregel „Punkt vor Strichrechnung“ ergibt $\overset{=15}{3\cdot 5} - 2 = 13$.

Klammert man dagegen die Teiloperation (5-2) ein, dann ergibt $3 \cdot \overbrace{(5-2)}^{=3} = 9$

c) Kommutativgesetz

Auch Vertauschungsgesetz genannt. Hauptanwendung bei Addition und Multiplikation:

- Egal wie ich die Summanden einer Addition vertausche, das Ergebnis ist immer das Gleiche. $4 + 3 = 7 \quad = \quad 3 + 4 = 7$
- Egal wie ich die Faktoren einer Multiplikation vertausche, das Ergebnis ist immer das Gleiche. $4 \times 3 = 12 \quad = \quad 3 \times 4 = 12$

d) Assoziativgesetz

Auch Verknüpfungsgesetz genannt. Hauptanwendung bei Addition und Multiplikation:

Egal in welcher Reihenfolge ich die Zahlen bei einer Addition oder einer Multiplikation verknüpfe, das Ergebnis bleibt immer das Gleiche.

$(4 + 3) + 6 = 13 \quad = \quad 4 + (3+6) = 13$

$(4 \times 3) \times 2 = 24 \quad = \quad 4 \times (3 \times 2) = 24$

e) Distributivgesetz

Auch Verteilungsgesetz genannt. Dieses Gesetz gibt an, wie man Verknüpfungen in Klammerschreibweise so in Verknüpfungen ohne Klammerschreibweise überführt, dass das Ergebnis das Gleiche bleibt:

Aus $4 \times (3 + 2) = 4 \times 5 = 20$ wird $\Rightarrow$ $4 \times 3 + 4 \times 2 = 12 + 8 = 20$

Aus $(4 + 6) / 2 = 10 / 2 = 5$ wird $\Rightarrow$ $4 / 2 + 6 / 2 = 2 + 3 = 5$

f) Äqivalenzumformung

Das Verfahren, mit dem man Gleichungen umformt, um unbekannte Werte zu ermitteln, nennt man **Äquivalenzumformung**. Äquivalenz heißt wörtlich: „gleich wahr“. Damit wird ausgedrückt, dass die Gleichungen vor und nach der Umformung genauso (=gleich) wahr sind.

a) **Apfel-Beispiel 1 (<u>Äquivalenzumformung durch Addition</u>):**

2 🍎 = 50 ct ist genauso wahr wie

2 🍎 + 50 ct = 50 ct + 50 ct | (auf beiden Seiten der Gleichung habe ich 50ct addiert)

ist genauso wahr wie

2 🍎 + 50 ct = 100 ct | auf der rechten Seite wurde das Ergebnis der Addition von 50ct + 50 ct berechnet

b) **Apfel-Beispiel 2 (<u>Äquivalenzumformung durch Multiplikation und Division</u>):**

2 🍎 = 50 ct ist genauso wahr wie

2 🍎 / 2 = 50 ct / 2 | beide Seiten der Gleichung wurde durch 2 geteilt (anderes Wort: dividiert)

Ist genauso wahr wie

1 🍎 = 25 ct | auf beiden Seiten wurde das Ergebnis der Division durch 2 berechnet

4 × 1 🍎 = 25 ct × 4 | auf beiden Seiten wird mit 4 malgenommen (anderes Wort: multipliziert)

4 🍎 = 100 ct |auf beiden Seiten wird das Ergebnis der Multiplikation mit 4 berechnet

Die Methoden der Äquivalenzumformung werden auch bei der Lösung von Dreisatz-Aufgaben verwendet, bei denen aus bekannten Werten ein unbekannter Wert ermittelt wird. Statt mit einem Gleichzeichen = in der Mitte der Gleichung werden die Werte dazu auch häufig in einer Tabelle eingetragen.

Menge	Betrag	Rechenoperation
2	50 ct	: 2
1	25 ct	× 4
4	100 ct	Einheitenumformung
4	1 €	

B) Algebra – das Rechnen mit Unbekannten

Wenn man weiß, dass ein Apfel 50 ct kostet, kann man daraus berechnen, was zwei Äpfel kosten.

Als **Algebra** bezeichnet man das Teilgebiet der Mathematik, bei dem es um das Rechnen mit Gleichungen geht, bei denen aus einzelnen **bekannten Werten** die noch **unbekannten Werte** ermittelt werden.

In unserem Beispiel sind dabei „ein Apfel“, „50ct“ und „zwei Äpfel“ die **bekannten Werte**, der Preis für zwei Äpfel ist der noch zu ermittelnde **unbekannte Wert**.

Vor rund tausend Jahren wurden die bis dahin bekannten Grundlagen der **Algebra** (von arabisch: *al-dschabr* „das Zusammenfügen gebrochener Teile“) von arabischen und persischen Gelehrten zusammengefasst und deutlich weiterentwickelt. Die Übernahme dieses Wissens durch europäische Gelehrte vor rund 500 Jahren war dann die Grundlage für den sich immer mehr beschleunigenden technologischen Fortschritt, der zunächst Europa und später die ganze Welt erfasste.

1) Ermittlung eines unbekannten Wertes durch Dreisatz

Wenn ich drei Werte kenne (in unserem Beispiel „ein Apfel“, „50ct“ und „zwei Äpfel“) und einen Wert suche („den Preis“ für zwei Äpfel), also drei **bekannte Werte** und **einen unbekannten Wert** habe, dann nennt man das im Deutschen eine **Dreisatzaufgabe**.

Bei einer Dreisatzaufgabe geht man davon aus, dass zwei der bekannten Werte dasselbe Verhältnis zueinander haben, wie der dritte bekannte Wert zu dem unbekannten Wert.

50 ct / 1   = ? ct / 2

Anstelle des Fragezeichens ? verwendet man in einer Gleichung meistens einen Buchstaben wie x oder y als Symbol (auch „Platzhalter“ genannt) für den gesuchten unbekannten Wert. Also:

50 ct / 1   = y ct / 2

Damit das Ganze noch übersichtlicher ist, lässt man beim Rechnen oft die Einheitenzeichen weg, wie hier „ct“ für Cent und „“ für Apfel. Also:

50 / 1   = y / 2

Da 50/1= 50 sind, schreibt man also:

50   = y / 2

Den Bruchstrich kann man auch so schreiben:

$$50 \quad = \frac{y}{2}$$

Jetzt kommt die Äquivalenzumformung, bei der ich beide Seiten mit der Zahl „2“ multipliziere:

$$2 \times 50 \quad = 2 \times \frac{y}{2}$$

Diese Gleichung kann ich auch so schreiben:

$$100 \quad = \frac{2 \times y}{2}$$

Ober- und unterhalb des Bruchstriches habe ich denselben Faktor „2“ (hier gelb markiert), den ich gegeneinander **kürzen** kann (also oberhalb und unterhalb des Bruchstrichs wegstreichen kann).

Damit ist: $100 \quad = y$

Der gesuchte Wert ist also 100. Der Preis für 2 Äpfel beträgt also 100 ct.

2) <u>Prozentrechnung als Spezialfall der Dreisatzrechnung</u>

Ein Prozent heißt auf Deutsch: ein Hundertstel.

Sind von 100 Äpfeln 30 faul, so kann ich dazu auch sagen 30 % der Äpfel sind faul.

Sind von 200 Äpfeln 30% faul, so kann man mit Dreisatz die Lösung wie folgt berechnen:

$$\frac{30}{100} \quad = \frac{y}{200}$$

$$200 \times \frac{30}{100} \quad = 200 \times \frac{y}{200}$$ | (beide Seiten der Gleichung habe ich mit 200 multipliziert)

Das Ganze kann man auch so schreiben:

$$\frac{200 \times 30}{100} \quad = \frac{200 \times y}{200}$$

anschließend die 200 in die Faktoren 100 × 2 zerlegen:

$$\frac{100\ x\ 2 \times 30}{100} \quad = \frac{200 \times y}{200}$$

Nach Kürzen gleicher Faktoren über und unter dem Bruchstrich bleibt:

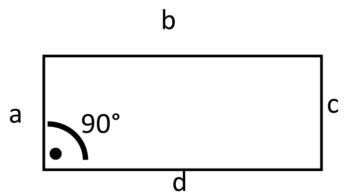
$$2 \times 30 \quad = y$$

$$60 \quad = y$$

30% von 200 sind also 60.

C) **Berechnung von Umfang und Flächen**

a) **eines Rechteckes**



Ein **Rechteck** ist ein Viereck mit rechten Winkeln, das bedeutet, der Innenwinkel beträgt an allen Ecken 90°.

Um zu kennzeichnen, dass es sich um einen rechten Winkel, also einen 90° Winkel handelt, setzt man manchmal - anstatt einer Beschriftung mit Winkelzahl 90° - einfach einen Punkt in den Winkelbogen.

Der Umfang eines Rechteckes entspricht der Summe aller Kantenlängen,

also $\quad a + b + c + d = U$

Da a und c und b und d in einem Rechteck gleich lang sind, kann man den Umfang auch mit:

$2 \times a + 2 \times b = U$ berechnen

Die Fläche A eines Rechteckes entspricht der Multiplikation zweier angrenzender Kanten, also:

$A = a \times b$

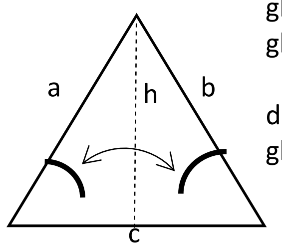
Das **Quadrat** ist der Spezialfall eines Rechteckes, bei dem alle Kanten gleich lang sind.

Deshalb gilt für den Umfang $4 \times a = U$ und für die Fläche $A = a \times a = a^2$

2) **eines Dreieckes**

Die Fläche eines gleichschenkeligen Dreieckes lässt sich mit $A = \frac{1}{2} c \times h$ berechnen.

Da die Seiten a und b in einem gleichschenkeligen Dreieck gleichlang sind, ist der Umfang $U = 2 \times a + c$.



gleichschenkelig = zwei gleichlange Seiten, also a = b,

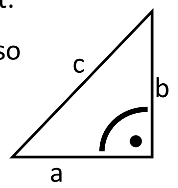
daraus folgt auch zwei gleichgroße Winkel

Ist eine der Seiten a, c oder die Höhe h unbekannt und gibt es in dem Dreieck einen rechten Winkel (also einen 90°- Winkel), so kann man die fehlende Seite auch mit einer speziellen Formel berechnen, die nach dem griechischen Mathematiker Pythagoras benannt ist:

Die Quadratzahl der dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist genauso groß wie die Summe der Quadratzahlen der anderen beiden Seiten, also:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Diese Formel nennt man auch den „Satz des Pythagoras".



Je nachdem welche Seite unbekannt ist, kann man sie durch Umformung dieser Formel bestimmen:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

3) eines Kreises

Die Berechnung von Umfang und Fläche eines Kreises ist ein weiterer Spezialfall der Algebra, da falls der **Durchmesser** eines Kreises bekannt ist, die unbekannte **Fläche** oder der unbekannte **Umfang** ermittelt werden kann.

Die älteste uns bekannte Näherung der Zahl, die das Verhältnis von Umfang, Durchmesser und Fläche eines Kreises beschreibt, stammt aus einem ungefähr 3.600 Jahre alten ägyptischen Rechenbuch:

- Multipliziert man die Hälfte des **Durchmesser**s ***d*** eines Kreises, also den **Radius *r*** zunächst mit sich selbst und dann mit ungefähr 3,14, erhält man die **Fläche *A*** des Kreises. Bei einem Draht bezeichnet man diese Fläche auch als **Querschnitt**.
  Nach den Ägyptern haben sich auch die Griechen mit mathematischen Problemen beschäftigt und diese Zahl von ungefähr 3,14 mit ihrem Buchstaben **Pi π** bezeichnet.
  Mathematisch drückt man das Verhältnis von Radius ***r*** zur Fläche ***A*** durch die Gleichung: $\boldsymbol{A = \pi r^2}$ aus.
  (Achtung: Hier steht ***A*** nicht für die Maßeinheit Ampère, mit der man die Stromstärke misst, sondern für die Fläche (auch Querschnitt benannt)
- Multipliziert man den Durchmesser ***d***, also den zweifachen Radius eines Kreises mit **π**, so erhält man den Umfang ***U*** des Kreises.
  Mathematisch lautet die Gleichung: $\boldsymbol{U = \pi d}$ *(bei Bezug auf den Durchmesser) oder* $\boldsymbol{U = 2 r \pi}$ *(bei Bezug auf den Radius).*
  (Und wieder Achtung: Hier steht ***U*** nicht für die Stromspannung, sondern für den Kreisumfang).

Beispiel:

Hat man also einen Draht, der mit 200 Windungen (oder Wicklungen) auf eine Spule mit einem mittleren (=durchschnittlichen) Windungsdurchmesser von 30 mm gewickelt ist, so berechnet sich die Drahtlänge wie folgt:

Windungsdurchmesser d = 30 mm: nach ***U = π d*** *ist* ***U=3,14 × 30 mm = 94,2 mm***
94,2 mm = **9,42 cm** = **0,0942 m** ist also der mittlere (oder auch durchschnittliche) Umfang der Spule. Bei 200 Windungen hat der Draht also eine Gesamtlänge von **0,0942 m × 200 = 18,84 m.**