A. Mathematische Grundkenntnisse

1. Bezeichnung der Bestandteile einer Rechenoperation

a) Addition

$$6 + 2 = 8$$

„erster Summand“ „plus“ „zweiter Summand“ „ist gleich“ „Summe“

b) **Subtraktion** (umgangssprachlich: „voneinander abziehen“)

$$6 - 2 = 4$$

„Minuend“ „minus“ „Subtrahend“ „ist gleich“ „Differenz“

c) **Multiplikation** (umgangssprachlich: „malnehmen“)

$$6 \times 2 = 12$$

„erster Faktor“ „mal“ „zweiter Faktor“ „ist gleich“ „Produkt“ oder auch:

„Multiplikator“ „mal“ „Multiplikant“ „ist gleich“ „Produkt“

d) **Division** (umgangssprachlich: „teilen“)

$$6 : 2 = 3$$

„Dividend“ „durch“ „Divisor“ „ist gleich“ „Quotient“

2. Algebra – das Rechnen mit Unbekannten

Wenn man weiß, dass ein Apfel 50 ct kostet, kann man daraus berechnen, was zwei Äpfel kosten.

Als **Algebra** bezeichnet man das Teilgebiet der Mathematik, bei dem es um das Rechnen mit Gleichungen geht, bei denen aus einzelnen **bekannten Werten** die noch **unbekannten Werte** ermittelt werden.

In unserem Beispiel sind dabei „ein Apfel“, „50ct“ und „zwei Äpfel“ die **bekannten Werte**, der Preis für zwei Äpfel ist der noch zu ermittelnde **unbekannte Wert**.

Vor rund tausend Jahren wurden die bis dahin bekannten Grundlagen der **Algebra** (von arabisch: *al-dschabr* „das Zusammenfügen gebrochener Teile“) von arabischen und persischen Gelehrten zusammengefasst und deutlich weiterentwickelt. Die Übernahme dieses Wissens durch europäische Gelehrte vor rund 500 Jahren war dann die Grundlage für den sich immer mehr beschleunigenden technologischen Fortschritt, der zunächst Europa und später die ganze Welt erfasste.

Das Verfahren, mit dem man Gleichungen umformt, um unbekannte Werte zu ermitteln, nennt man **Äquivalenzumformung**. Äquivalenz heißt wörtlich: „gleich wahr“. Damit wird ausgedrückt, dass die Gleichungen vor und nach der Umformung genauso (=gleich) wahr sind.

a) Apfel-Beispiel 1 (<u>Äquivalenzumformung durch Addition</u>):

1 🍎	= 50 ct	ist genauso wahr wie
1 🍎 + 50 ct	= 50 ct + 50 ct	| (auf beiden Seiten der Gleichung habe ich 50ct addiert)
		ist genauso wahr wie

1 + 50 ct = 100 ct | auf der rechten Seite wurde das Ergebnis der Addition von 50ct + 50 ct berechnet

b) **Apfel-Beispiel 2 (<u>Äquivalenzumformung durch Multiplikation</u>):**

1 = 50 ct ist genauso wahr wie

2 x = 2 x 50 ct | (beide Seiten der Gleichung habe ich mit 2 multipliziert)

Ist genauso wahr wie

2 = 100 ct | auf der rechten Seite wurde das Ergebnis der Multiplikation von 2 x 50 berechnet

c) **Apfel-Beispiel 3 (<u>Äquivalenzumformung durch Multiplikation - Dreisatz</u>):**

Wenn ich drei Werte kenne (in unserem Beispiel „ein Apfel“, „50ct“ und „zwei Äpfel“) und einen Wert suche („den Preis“ für zwei Äpfel), also drei **bekannte Werte** und **einen unbekannten Wert** habe, dann nennt man das im Deutschen eine **Dreisatzaufgabe**.

Bei einer Dreisatzaufgabe geht man davon aus, dass zwei der bekannten Werte dasselbe Verhältnis zueinander haben, wie der dritte bekannte Wert zu dem unbekannten Wert.

50 ct / 1 = ? ct / 2

Anstelle des Fragezeichens ? verwendet man in einer Gleichung meistens einen Buchstaben wie x oder y als Symbol (auch „Platzhalter“ genannt) für den gesuchten unbekannten Wert. Also:

50 ct / 1 = y ct / 2

Damit das Ganze noch übersichtlicher ist, lässt man beim Rechnen oft die Einheitenzeichen weg, wie hier „ct“ für Cent und „“ für Apfel. Also:

50 / 1 = y / 2

Da 50/1= 50 sind, schreibt man also:

50 = y / 2

Den Bruchstrich kann man auch so schreiben:

$$50 = \frac{y}{2}$$

Jetzt kommt die Äquivalenzumformung, bei der ich beide Seiten mit der Zahl „2“ multipliziere:

$$2 \times 50 = 2 \times \frac{y}{2}$$

Diese Gleichung kann ich auch so schreiben:

$$100 = \frac{2 \times y}{2}$$

Ober- und unterhalb des Bruchstriches habe ich denselben Faktor „2“ (hier gelb markiert), den ich gegeneinander **kürzen** kann (also oberhalb und unterhalb des Bruchstrichs wegstreichen kann).

Damit ist: 100 = y

Der gesuchte Wert ist also 100. Der Preis für 2 Äpfel ist also 100 ct.

d) **Apfel-Beispiel 4 (<u>Prozentrechnung als Spezialfall der Dreisatzrechnung</u>):**

Ein Prozent heißt auf Deutsch: ein Hundertstel.

Sind von 100 Äpfeln 30 faul, so kann ich dazu auch sagen 30 % der Äpfel sind faul.

Sind von 200 Äpfeln 30% faul, so kann man mit Dreisatz die Lösung wie folgt berechnen:

$$\frac{30}{100} = \frac{y}{200}$$

$$200 \times \frac{30}{100} = 200 \times \frac{y}{200}$$ | (beide Seiten der Gleichung habe ich mit 200 multipliziert)

Das Ganze kann man auch so schreiben:

$$\frac{200 \times 30}{100} = \frac{200 \times y}{200}$$

anschließend die 200 in die Faktoren 100 × 2 zerlegen:

$$\frac{100\, x\, 2 \times 30}{100} = \frac{200 \times y}{200}$$

Nach Kürzen gleicher Faktoren über und unter dem Bruchstrich bleibt:

$$2 \times 30 = y$$

$$60 = y$$

30% von 200 sind also 60.

3. Berechnung von Umfang und Fläche eines Kreises

Die Berechnung von Umfang und Fläche eines Kreises ist ein weiterer Spezialfall der Algebra, da falls der **Durchmesser** eines Kreises bekannt ist, die unbekannte **Fläche** oder der unbekannte **Umfang** ermittelt werden kann.

Die älteste uns bekannte Näherung der Zahl, die das Verhältnis von Umfang, Durchmesser und Fläche eines Kreises beschreibt, stammt aus einem ungefähr 3.600 Jahre alten ägyptischen Rechenbuch:

- Multipliziert man die Hälfte des **Durchmesser**s ***d*** eines Kreises, also den **Radius** ***r*** zunächst mit sich selbst und dann mit ungefähr 3,14, erhält man die **Fläche** ***A*** des Kreises. Bei einem Draht bezeichnet man diese Fläche auch als **Querschnitt**.
  Nach den Ägyptern haben sich auch die Griechen mit mathematischen Problemen beschäftigt und diese Zahl von ungefähr 3,14 mit ihrem Buchstaben **Pi π** bezeichnet.
  Mathematisch drückt man das Verhältnis von Radius ***r*** zur Fläche ***A*** durch die Gleichung: $\boldsymbol{A = \pi r^2}$ aus.
  (Achtung: Hier steht ***A*** nicht für die Maßeinheit Ampère, mit der man die Stromstärke misst, sondern für die Fläche (auch Querschnitt benannt)
- Multipliziert man den Durchmesser ***d***, also den zweifachen Radius eines Kreises mit **π**, so erhält man den Umfang ***U*** des Kreises.
  Mathematisch lautet die Gleichung: ***U = π d*** *(bei Bezug auf den Durchmesser) oder* ***U = 2 r π*** *(bei Bezug auf den Radius).*
  (Und wieder Achtung: Hier steht ***U*** nicht für die Stromspannung, sondern für den Kreisumfang).

Beispiel:

Hat man also einen Draht, der mit 200 Windungen (oder Wicklungen) auf eine Spule mit einem mittleren (=durchschnittlichen) Windungsdurchmesser von 30 mm gewickelt ist, so berechnet sich die Drahtlänge wie folgt:

Windungsdurchmesser d = 30 mm: nach ***U = π d*** *ist* ***U=3,14 × 30 mm = 94,2 mm***
94,2 mm = **9,42 cm** = **0,0942 m** ist also der mittlere (oder auch durchschnittliche) Umfang der Spule. Bei 200 Windungen hat der Draht also eine Gesamtlänge von **0,0942 m × 200 = 18,84 m.**

4. Umformung von Einheiten und Exponentialschreibweise

Ist der Einheit ein großes **M** vorangestellt, so bedeutet das: ein Tausendfaches. 1 MV (ausgesprochen: ein Megavolt) sind also eintausend Volt, mathematisch geschrieben 1 MV = 1.000 V.

Eine Zahl kann man auch mit der mathematischen **Exponentialschreibweise** darstellen. Die Zahl, die dabei mit sich selbst multipliziert wird, nennt man dabei **Basis**, die Anzahl wie oft sie mit sich selbst multipliziert wird, nennt man **Exponent**. Beides zusammen nennt man **Potenz**. Die Exponentialschreibweise der Zahl 1.000 zur Basis 10 ist 10^3, da man die Zahl 10 dreimal mit sich selbst multiplizieren muss, um Tausend zu erhalten:
(10 x 10 x 10 = 1.000). Bei der Potenz 10^3 ist 10 die Basis, 3 der Exponent.

Ist der Einheit ein großes **G** vorangestellt, so bedeutet das: ein Millionenfaches. 1 GV (ausgesprochen: ein Gigavolt) sind also eine Million Volt. Da man die Zahl 10 sechs Mal mit sich selbst multiplizieren muss, um eine Million zu erhalten, wird die Zahl Million in Exponentialschreibweise 10^6 geschrieben.

Ist der Einheit ein kleines **m** vorangestellt, so bedeutet das: ein Tausendstel. 1 mV (ausgesprochen: ein Millivolt) ist also ein Tausendstel Volt, mathematisch geschrieben 1mV = 0,001 V. Bei der Exponentialschreibweise verwendet man einen negativen Exponenten:
1mV = $\frac{1}{1.000}$ V = $\frac{1}{10\times10\times10}\,\mathrm{V} = \frac{1}{10^3}\,\mathrm{V} = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{V} = 10^{-3}\,\mathrm{V}$

Ist der Einheit der griechische Buchstabe My **µ** vorangestellt, so bedeutet das: ein Millionstel.
1 µV (ausgesprochen: ein Mikrovolt) ist also ein Millionstel Volt,
mathematisch geschrieben 1µV = 0,001 mV = 0,000001 V = 1 x $10^{-6}\,\mathrm{V} = 10^{-6}$ V.

5. Kürzen

a) Bei Divisionen:

1. Steht über und unter dem Bruchstrich dieselbe Potenz, so hebt sie sich gegenseitig auf.

Beispiel $\frac{5\,\mathrm{mV}}{7\mathrm{mA}} = \frac{5\times10^{-3}\mathrm{V}}{7\times10^{-3}\mathrm{A}} = \frac{5\,\mathrm{V}}{7\,\mathrm{A}}$

2. Steht über und unter dem Bruchstrich eine Potenz mit derselben Basis aber einem anderen Exponenten, so kann man durch Subtraktion der Exponenten kürzen:

Beispiel $\frac{5\,\mathrm{mV}}{7\mu\mathrm{A}} = \frac{5\times10^{-3}\mathrm{V}}{7\times10^{-6}\mathrm{A}} = \frac{5\,\mathrm{V}}{7\times10^{-3}\mathrm{A}} = \frac{5\,\mathrm{V}}{7\,\mathrm{mA}}$

3. Lassen sich Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren, so kann man ebenfalls kürzen:

Beispiel: $\frac{25\,\mathrm{V}}{35\,\mathrm{A}} = \frac{5\times5\,\mathrm{V}}{7\times5\,\mathrm{A}} = \frac{5\,\mathrm{V}}{7\,\mathrm{A}}$

b) Bei Multiplikationen:

Gegenläufige Exponenten zur selben Basis kann man ebenfalls gegeneinander kürzen:

Beispiel 1: 7 mA x 5 MV = 7 x 10^{-3} A x 5 x 10^3 V = 7 A x 5 V

Beispiel 2: 7 µA x 5 MV = 7 x 10^{-6} A x 5 x 10^3 V = 7 x 10^{-3} A x 5 V = 7 mA x 5 V

6. Runden

Manche Zahlen, wie die Zahl π (= 3,1415926535…) haben viele Nachkommastellen, die man nicht alle ausschreiben kann. Deswegen bricht man an einer Stelle ab, die mathematische Bezeichnung für dieses Vorgehen heißt **Runden**. Wenn die Zahl, die der Stelle folgt, an der man rundet, 5 oder größer ist, dann rundet man auf, ansonsten rundet man ab.

Beispiel 1 - **Aufrunden**: Entscheidet man sich dafür, π an der vierten Nachkommastelle zu runden, so rundet man auf und schreibt 3,1416, da die nächstfolgende Zahl 9 ≥ (größergleich) 5 ist.

Beispiel 2 – **Abrunden**: Entscheidet man sich dafür π, an der zweiten Nachkommastelle zu runden, so rundet man ab und schreibt 3,14, da die nächstfolgende Zahl 1 < (kleiner) als 5 ist.